АНАЛИЗ, МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

УДК 517.977.5

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЗАПАСОВ

Коды JEL:

Белоусова Е. П., *кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры системного анализа и управления, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия*

E-mail: e.p.belousova@gmail.com

ID: 272845

Поступила в редакцию 30.08.2022. Принята к публикации 07.09.2022

Аннотация

Предмет. *Дискретная модель задачи управления запасами.*

Тема. *Определение количества заказываемых продуктов и сроки реализации заказов.*

Цели. *Рассмотреть дискретную модель задачи управления запасами, метод и алгоритм решения этой задачи. Рассчитать оптимальное управление для конкретных примеров, сделать соответствующие выводы о результатах исследования.*

Методология. *Применения метода обратной связи для построения оптимального управляющего воздействия.*

Результаты. *Разработаны эффективная модель и приложение для оптимального управления процессом распределения запасов.*

Выводы. *В рамках изучения способов нахождения оптимального управления выделены два метода решения — метод нахождения оптимального программного управления и метод нахождения оптимального управления по принципу обратной связи. Для большей наглядности рассмотрены несколько задач с различными начальными условиями. Решение задач было реализовано в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica. В статье представлен пример решения одной из задач*

Ключевые слова: *Запасы, распределение, дискретная модель, оптимальное управление.*

UDC 517.977.5

OPTIMAL MANAGEMENT OF DISCRETE INVENTORY ALLOCATION

JEL Codes:

Belousova E. P., *Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of System Analysis and Management, Voronezh State University, Voronezh, Russia*

E-mail: e.p.belousova@gmail.com

ID: 272845

Annotation

Subject. *A discrete model of the inventory management problem.*

Topic. *Determination of the number of products ordered and the timing of the implementation of orders.*

Goals. *Consider a discrete model of the inventory management problem, a method and algorithm for solving this problem. Calculate the optimal control for specific examples, draw appropriate conclusions about the results of the work done.*

Methodology. *Application of the feedback method to build an optimal control effect.*

Results. *An effective model and application for optimal management of the inventory distribution process have been developed.*

Conclusions. *As part of the study of ways to find optimal control, two solution methods were identified — the method of finding optimal program control and the method of finding optimal control based on the feedback principle. For greater clarity, several examples of tasks with different initial conditions. The solution of these problems was implemented in the Wolfram Mathematica computer algebra system.*

Keywords: *Stocks, distribution, discrete model, optimal control.*

DOI: 10.22394/1997-4469-2022-58-3-147-153

Введение

В статье рассматривается дискретная модель задачи оптимального управления запасами. Задача такого типа формулируется в случаях, когда существует необходимость создания запаса некоторых продуктов на заданном промежутке времени. В ходе решения определяется количество заказываемых продуктов и сроки реализации заказов.

Отвечая на вопрос о количестве товаров в заказе, будем рассматривать такой размер заказа, от которого будет зависеть количество ресурсов, необходимых для реализации каждого из последующих заказов. Прежде чем искать ответ на вопрос о сроках реализации, необходимо определить тип рассматриваемой системы. Если система имеет периодический тип контроля состояния запасов продуктов, тогда заказ будет формироваться в определенные (обычно равные) промежутки времени. Если же система имеет непрерывный тип контроля состояния запасов, тогда срок следующего заказа будет определяться состоянием запасов на текущий момент времени.

Стоит отметить, что задача усложняется тем фактом, что необходимо не просто ответить на заданные вопросы, но и найти такие решения, чтобы на реализация заказов осуществлялась с минимальными затратами.

На первый взгляд ответить на поставленные вопросы не составляет большого труда. Однако, стоит отметить, что понятие оптимальности управления запасами в конкретной системе подразумевает условие минимизации суммарных затрат на заказы, а, соответственно, и на ресурсы. Заметим, что достаточно трудно построить универсальную обобщенную модель управления запасами, которая учитывала бы все виды условий, наблюдаемые в реальных системах.

В работе описывается дискретная модель управления запасами. Для анализа такой модели поставлена и решена соответствующая задача построения оптимального управляющего воздействия.

Дискретные процессы занимают важное место в теории оптимального управления. Многие задачи планирования в экономике описываются разностными уравнениями с дискретным временем, а в задачах такого типа информация о состоянии системы поступает пользователю в фиксированные моменты времени, и само управлением, соответственно, осуществляется дискретно.

Постановка задачи

Рассмотрим дискретную модель задачи управления запасами продукции на складе [1; 10]. Пусть n — количество видов продукции, m — количество видов используемых ресурсов, N — количество рассматриваемых периодов времени, $k = k_0$ — момент начала процесса. Далее определим

$$x(k) = \{x_1(k),...,x_n(k)\}, k = k_0,.k_0+1,...,N-1 \quad (1.1)$$

вектор количества товаров всех видов, имеющихся на складе к концу k-го периода,

$$u(k) = \{u_1(k),...,u_m(k)\}, k = k_0,k_0+1,...,N-1 \quad (1.2)$$

вектор ресурсов, затрачиваемых на производство единицы продукции,

$$w(k) = \{w_1(k),...,w_n(k)\}, k = k_0,k_0+1,...,N-1 \quad (1.3)$$

вектор количества товаров, поставленных со склада в k-й период времени. Тогда уравнения, описывающие процесс изменения количества товаров, имеют вид:

$$x(k+1) = x(k) + Bu(k) - w(k), k = k_0,k_0+1,...,N-1, \quad (1.4)$$

где B_{nxm} — технологическая матрица.

Между количеством поставленных в момент времени k товаров со склада $w_i(k)$ и количеством имеющихся в наличии в момент времени k товаров $x_i(k)$ существует связь, определяемая по правилу

$$w_i(k) = a_i(k)x_i(k), 0 \le a_i(k) \le 1. \quad (1.5)$$

В формуле (1.5) коэффициенты $a_i(k)$ показывают, какая часть i-го товара будет поставлена в следующий период. Заметим, что уравнения, описывающие процесс, могут быть записаны в векторно-матричной форме:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + Bu(k), k = k_0,k_0+1,...,N-1, \quad (1.6)$$

$$A_{n\times n}(k) = \begin{bmatrix} 1-a_1(k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-a_2(k) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-a_n(k) \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Кроме того, известны начальное состояние системы $x(k_0) = x_0$ и конечное состояние $x(N) = x_1$. Качество работы системы за период N оценивается квадратичным критерием:

$$I(u) = \sum_{k=k_0}^{N-1} u^T(k)u(k). \quad (1.8)$$

Величина $I(u)$ отражает суммарные затраты на заказываемый товар за весь плановый период.

Отметим, что квадратичный по управлению показатель качества часто используется в подобных задачах как в дискретных системах, так и в системах с непрерывным временем [3]. Для задач управления с критериями типа (1.8) разработаны и обоснованы соответствующие методы поиска оптимальных управляющий воздействий [2], которые удовлетворяли бы заданным граничным условиям. В данной работе требуется найти управляющие воздействия $u^0(k)$, переводящие систему из начального состояния $x(k_0) = x_0$ в конечное состояние $x(N) = x_1$. Кроме того, зная управление на каждом шаге, нужно найти промежуточные состояния системы $x(k)$, $k = k_0 + 1,\ k_0 + 2,\ \dots\ N - 1$. При этом управление $u^0(k)$ требуется выбрать так, чтобы величина квадратичного критерия качества $I(u^0)$ была минимальной — другими словами, должно выполняться неравенство:

$$I(u^0) = \sum_{k=k_0}^{N-1} u^{0T}(k)u^0(k) \le I(u) = \sum_{k=k_0}^{N-1} u^T(k)u(k). \qquad (1.9)$$

Отметим, что родственные задачи изучались, например, в работах [2—6].

Решение задачи

Для построения оптимального управления будем применять метод поиска соответствующего управляющего воздействия для линейной дискретной управляемой системы с квадратичным показателем качества, изложенный в [2]. Приведем рассуждения, которые дают обоснование оптимальности такого управления.

Управляющие воздействия u разыскиваются в виде функций $u(t)$, причем начальное и конечное условия $x(t_0) = x_0$ и $x(t_N) = x_1$ предполагаются заданными заранее. Подобные задачи носят название проблем программного управления. Этот термин подчеркивает тот факт, что в рассматриваемых задачах движение $x(t)$ осуществляется по программе, диктуемой выбранным заранее определенным управлением $u(t)$. Задачи программного управления составляют важную часть проблем в теории оптимального управления процессами. Однако, во многих случаях управление по программе не подходит, так как в реальных условиях работы системы оказывается неудовлетворительным. Основной недостаток этого метода состоит в том, что он не учитывает возможные дополнительные обстоятельства, возникающие по ходу процесса. Так, если в системе в определенный момент $t = t_*$ возникнут непредвиденные изменения $\Delta x(t_*)$ вектора $x(t)$, то заданное, неизменное при $t \ge t_*$ программное управление $u(t)$ поведет систему, начиная с момента $t = t_*$ в состояние $x(t_N)$, отличное от заданного положения x_1. В подобных ситуациях воздействие u должно формироваться с учетом возможной дополнительной информации, поступающей в систему по ходу процесса. Этому требованию отвечает управление, построенное по принципу обратной связи. Суть этого принципа состоит в следующем: в каждый момент времени t управляющее воздействие u определяется на основе информации о текущем состоянии системы в этот момент. Таким образом, воздействие u будет иметь вид $u(t, x(t))$ и зависеть не только от времени t, как программное управление, но и от состояния $x(t)$ в этот момент времени t. Управление по принципу обратной связи изображается обычно в виде структурной схемы, представленной на рисунке 1.

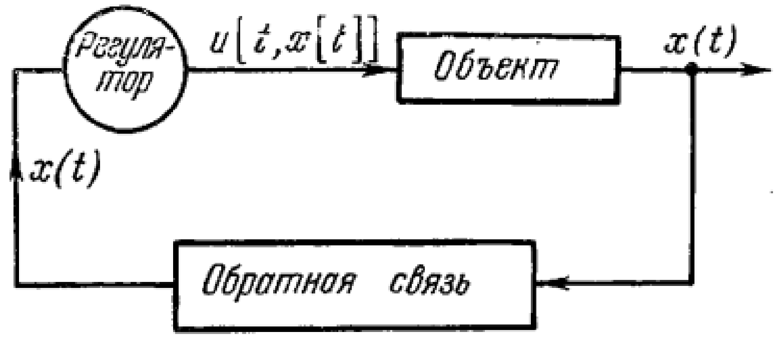

Рис. 1. Структурная схема метода обратной связи

Рассмотрим следующую задачу [2]. Пусть заданы момент времени $t = t_N$ и состояние $x(t_N) = x_1$, в которое необходимо привести систему (1.6) к моменту времени t_N управлением $u = u^0[t, x]$. Момент $t = t_N$ начала процесса и исходное состояние системы не заданы и могут оказаться произвольными в пределах $0 \le t \le t_N$. Функцию $u^0[t, x]$ требуется выбрать так, чтобы при любом начальном условии $t = t_0$, $x = x_0$ выполнялся минимум критерия качества (1.8), то есть, чтобы выполнялось неравенство (1.9), каково бы ни было другое возможное управление, $u = u(t)$ или $u = u[t] = u[t, x(t)]$, приводящее систему (1.6) в нужное конечное состояние $x(t_N) = x_1$.

Будем предполагать, что система вполне управляема на отрезке $t_0 \le t \le t_N$. Примем также, что начальный момент времени $t = t_0$ и начальное состояние системы $x = x_0$ выбраны. Известно, что функция $u(\tau)$, $t_0 \le \tau \le t_N$, разрешающая поставленную задачу, имеет вид:

$$u(\tau) = M_1(\tau, t_0, t_N)x_0 + M_2(\tau, t_0, t_N)x_1, \qquad (2.1)$$

где M_1 и M_1 — некоторые матрицы. Эту функцию в дальнейшем удобно обозначать символом $u_{t_0,x_0}(\tau)$, а соответствующее программное движение — символом $x_{t_0,x_0}(t)$. В частности, при $\tau = t_0$ получим:

$$u_{t_0,x_0}(t_0) = M_1(t_0,t_0,t_N)x_0 + M_2(t_0,t_0,t_N)x_1. \quad (2.2)$$

Так как величины t_N и x_1 по условию заданы, то правую часть функции можно рассматривать как функцию от $t = t_0$ и $x = x_0$ [7]:

$$u_{t,x}(t) = P(t)x + q(t) = r[t,x]. \quad (2.3)$$

Как раз эта функция r, подсчитанная для всех возможных значений t и x, и дает решение поставленной задачи. Другими словами,

$$u^0[t,x] = r[t,x] = P(t)x + q(t). \quad (2.4)$$

Проверим справедливость приведенного выше утверждения. Прежде всего, построенная функция u^0 непрерывна по своим аргументам и, таким образом, является возможным управлением. Теперь остается лишь проверить, что движение $x_{t_0,x_0}(t)$ при $t_0 \le t \le t_N$ есть решение $x[t]$ уравнения:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu^0[t,x(t)] = Ax(t) + B(px(t)+q), \quad (2.5)$$

причем, $u[t] = u^0[t,x_{t_0,x_0}(t)] = u_{t_0,x_0}(t)$. Для этой цели воспользуемся одним важным обстоятельством. Пусть t_γ — какой-нибудь момент времени из интервала (t_0,t_N), тогда отрезок $t_\gamma \le t \le t_N$ оптимального движения $x_{t_0,x_0}(t)$ является оптимальным движением $x_{t_\gamma,x_\gamma}(t)$ для нового начального условия $x_\gamma = x_{t_0,x_0}(t_\gamma)$ Это утверждение составляет основу принципа оптимальности. Следовательно, мы можем записать равенство:

$$u_{t_0,x_0}(t_\gamma) = u_{t_\gamma,x_\gamma}(t_\gamma) = u^0[t_\gamma,x_\gamma]. \quad (2.6)$$

Теперь по определению функций $u_{t_0,x_0}(t)$, $x_{t_0,x_0}(t)$ и вследствие (2.6) имеем:

$$x_{t_0,x_0}(t_\gamma+1) = Ax_{t_0,x_0}(t_\gamma) + Bu_{t_0,x_0}(t_\gamma) =$$

$$Ax_{t_0,x_0}(t_\gamma) + Bu[t_\gamma,x_{t_0,x_0}(t_\gamma)], \quad (2.7)$$

а это в силу произвольности t_γ доказывает, что функция $x_{t_0,x_0}(t)$ удовлетворяет уравнению (14), причем, действительно, $u_{t_0,x_0}(t) = u[t,x_{t_0,x_0}(t)]$.

Таким образом, нами установлено правило: для того, чтобы решить поставленную задачу об оптимальном управлении $u^0[t,x]$ системой (1.6) по принципу обратной связи, достаточно найти оптимальное управление $u_{t_0,x_0}(t)$ для соответствующей программной задачи при любых возможных t_0 и x_0. Тогда

$$u^0[t,x] = u_{t,x}(t). \quad (2.8)$$

Это утверждение было доказано в условиях минимизации критерия качества (1.8) на движениях линейной системы [2]. В действительности оно сохраняет свою силу для достаточно широкого класса задач. Следует обратить внимание на важное условие, которое должно выполняться относительно системы (6) [12].

Условие 1. *Для того, чтобы система (6) была управляемой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $[B, AB, A^2B,\dots,A^{n-1}B]$ был равен n.*

Для построения программного оптимального управления введем обозначения:

$$c(k_0,x_0) = x_1 - A^{N-k_0}x_0, \quad (2.9)$$

$$S(k) = A^{N-k-1}B, \quad (2.10)$$

$$H^{(k_0)} = [S(k_0), S(k_0+1),\dots,S(N-1)], \quad (2.11)$$

где матрица $H^{(k_0)}$ имеет размерность nx$(m\cdot(N-k_0))$. Пусть значения x_0,x_1 и момент времени k_0 таковы, что выполняется следующее

Условие 2. *Вектор $c(k_0,x_0)$ принадлежит подпространству, натянутому на линейно независимые столбцы матрицы $H^{(k_0)}$. Данное условие равносильно требованию полной управляемости системы (6).*

Тогда справедливо

Утверждение 1. *Для того, чтобы управления $\{u(k_0),u(k_0+1),\dots,u(N-1)\}$ переводили систему (6) из состояния $x(k_0) = x_0$ в состояние $x(N) = x_1$, необходимо и достаточно, чтобы $u(k_0),u(k_0+1),\dots,u(N-1)$ удовлетворяли матричному уравнению*

$$\sum_{k=k_0}^{N-1} S(k)u(k) = c(k_0,x_0). \quad (2.12)$$

Далее рассмотрим вектор из $m(N-k_0)$ компонент:

$$u^{(k_0)} = \begin{matrix} u(k_0) \\ u(k_0+1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{matrix} \quad (2.13)$$

Тогда соотношение (2.12) может быть представлено в виде уравнения:

$$H^{(k_0)}u^{(k_0)} = c(k_0,x_0). \quad (2.14)$$

Для решения уравнения (2.14) с условием (1.9) введем в рассмотрение псевдообратную матрицу $H^{+(k_0)}$ со следующим ее представлением [8]:

$$H^{+(k_0)} = H^{T(k_0)}\cdot[H^{(k_0)}H^{T(k_0)}]^{+}. \quad (2.15)$$

Для краткости, учитывая определение $H^{(k_0)}$, обозначим:

$$D(k_0) = H^{(k_0)}H^{T(k_0)} = \sum_{k=k_0}^{N-1} S(k)S^T(k), \quad (2.16)$$

где $D(k_0)$ — симметрическая, неотрицательно определенная матрица размерности $n\times n$, для которой, согласно [9]:

$$D^{+}(k)=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{-1}v_i v_i^T, \qquad (2.17)$$

где $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0$ — собственные значения матрицы $D(k_0)$, $v_1, v_2, \ldots, v_r$, — это ортонормированные собственные векторы, отвечающие соответствующим собственным значениям. Таким образом,

$$H^{+(k_0)} = H^{T(k_0)}D^{+}(k_0). \qquad (2.18)$$

В обозначениях, указанных выше, решение [8] уравнения (2.18) выражается формулой:

$$u^{0(k_0)} = H^{+(k_0)}c(k_0, x_0) \qquad (2.19)$$

или

$$u^{0(k_0)} = H^{T(k_0)}D^{+}(k_0)c(k_0, x_0). \qquad (2.20)$$

Взяв k-ю компоненту вектора $u^{0(k_0)}$ получим оптимальное программное управление на k-м шаге, $(k_0 \leq k \leq N-1)$:

$$u^0(k) = S^T(k)D^{+}(k_0)c(k_0, x_0), k = k_0, k_0+1, \ldots, N-1, \qquad (2.21)$$

которое далее будем обозначать

$$u^0(k) = u^0(k; k_0, x_0). \qquad (2.22)$$

Отметим, что применительно к решению задач теории управления псевдообратные матрицы использовались, в частности, в [12]. Для решения задачи нахождения оптимального управляющего воздействия методом обратной связи введем обозначения:

$$c(k) = c(k, x(k)) = x_1 - A^{N-k}x(k), \qquad (2.23)$$

$$D(k) = \sum_{i=k}^{N-1} S(i)S^T(i). \qquad (2.24)$$

Будем рассматривать правую часть равенства (2.10) как функцию от $k_0 = k$, $x_0 = x(k)$. Получим управление, построенное по принципу обратной связи ([2]):

$$u^0[k, x(k)] = u^0[k; k, x(k)] = S^T(k)D^{+}(k)c(k) \quad k = k_0, k_0+1, \ldots, N-1. \qquad (2.25)$$

Теорема. *Пусть выполнено условие 2 и $u^0(k;k_0,x_0)$ — оптимальное программное управление, переводящее систему (1.6) из начального состояния в конечное. Тогда $u^0(k;k_0,x_0)$ и реализация управления, построенного по принципу обратной связи $u^0[k;k,x(k)]$, на движении $x_0(k)$ совпадают, т. е.*

$$u^0[k; k, x^0(k)] = S^T(k)D^{+}(k)c(k) = u^0(k; k_0, x_0) = S^T(k)D^{+}(k_0)c(k_0) \qquad (2.26)$$

при всех $k = k_0, k_0 + 1, \ldots, N - 1$.

Доказательство этой теоремы приведено в [2]. Следовательно, $u^0[k,x(k)]$(2.25) — это оптимальное управление, построенное по принципу обратной связи. Промежуточные состояния системы, будут зависеть от $u^0(k)$ и, как было сказано ранее, будут иметь вид:

$$x(k + 1) = A(k)x(k) + Bu(k),\ k = k_0,\ k_0 + 1, \ldots, N - 1$$

Стоит также отметить, что реально для планирования будут использоваться величины $u(k)$, близкие к найденным оптимальным управляющим воздействиям. Это происходит из-за того, что мы немного жертвуем минимальной величиной критерия качества в пользу целочисленных векторов $x(k)$, показывающих количество товаров всех видов в момент времени k.

Заключение

Для детального изучения сформулированной задачи, а также для отработки построения управления методом обратной связи рассмотрены несколько примеров с разными начальными условиям. В каждом случае найдено оптимальное управление, рассчитаны векторы состояния системы в текущий момент времени и вычислено значение критерия качества, отражающее расходы, понесенные на приведение системы из начального состояния в конечное. Программная реализация четырех задач была осуществлена с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

В статье представлен пример решения одной из четырех задач.

Пример решения задачи

Рассмотрим задачу, имеющую следующие условия. Пусть количество видов товаров $n = 3$, количество видов затрачиваемых ресурсов $m = 2$, количество рассматриваемых периодов времени (месяцев) $N = 5$, $k = k_0$, $k_0 + 1, \ldots$, N.

Начальное состояние системы:

$$x(k_0) = x_0 = (100, 50, 150),$$

конечное состояние системы:

$$x(N) = x_1 = (1000, 1800, 2000),$$

коэффициенты $a_i(k)$, доли реализуемой в k-й период времени продукции, приведены в табл. 1.

Таблица 1

$a_i(k)$	k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4
$a_1(k)$	0,5	0,65	0,8	0,85	0,9
$a_2(k)$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,85
$a_3(k)$	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95

Задана технологическая матрица затрачиваемых ресурсов, показывающая, какое количество определенного вида ресурса необходимо потратить на производство единицы определенного вида товара:

$$B = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,05 \\ 0,04 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Требуется определить необходимые величины ресурсов $u(k)$, удовлетворяющие минимальному критерию качества (1.8), а также векторы количества товаров на конец k-го периода $x(k)$ для такой организации системы, чтобы к концу N-го периода имелось x_1 единиц продукции каждого вида соответственно. Также требуется определить величину квадратичного критерия качества, показывающего необходимые расходы на производство продукции. Полученные результаты можно увидеть на рисунке .

```
Количество видов продуктов n=3
Количество видов ресурсов m=2
Количество промежутков времени N=5
Начальное состояние системы x[k0]={10, 50, 150}
Конечное состояние системы x[N]={1000, 1800, 2000}

Промежуточные значения u[k] и x[k]:

u[k0] = {389.679, 1148.14}
x[k1] = {101.375, 155.401, 291.717} = {101, 155, 292}

u[k1] = {336.926, 1149.46}
x[k2] = {126.647, 190.583, 303.539} = {127, 191, 304}

u[k2] = {403.54, 1590.51}
x[k3] = {145.209, 232.367, 340.821} = {145, 232, 341}

u[k3] = {962.025, 3604.9}
x[k4] = {298.229, 445.444, 683.179} = {298, 445, 683}

u[k4] = {907.386, 17023.3}
x[k5] = {971.724, 1805.44, 2008.7} = {972, 1805, 2009}

Критерий качества I[u] = 3.10131×10^8
```

Рис. Результаты программных вычислений, пример 1

Результаты показывают, что программа действительно переводит систему из начального состояния в конечное, а также находит оптимальное управление движением системы методом обратной связи. Однако, стоит отметить, что решение не в точности совпадает с конечным вектором — $x[k5]$ и является лишь приближением к конечному вектору x_1. Как уже было сказано ранее, в реальных задачах нам придется пожертвовать минимальным критерием качества при найденных $u(k)$ в пользу целочисленных элементов векторов $x(k)$.

Информация о конфликте интересов

Мы, авторы данной статьи, со всей ответственностью заявляем о частичном и полном отсутствии фактического или потенциального конфликта интересов с какой бы то ни было третьей стороной, который может возникнуть вследствие публикации данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Суркова П. И.* Дискретная модель задачи управления запасами / П. И. Суркова // Математика, информационные технологии, приложения : сборник трудов Межвузовской научной конференции молодых ученых и студентов, Воронеж, 27 апреля 2022 г. — Воронеж : Научная книга, 2022. — 292 с.
2. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением: Линейные системы / Н. Н. Красовский. — Москва: НАУКА ; Главная редакция физико-математической литературы, 1968. — 475 с. — EDN YODVXJ.
3. *Сазанова Л. А.* Дискретная модель управления запасами как задача оптимального управления / Л. А. Сазанова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Экономика и управление. — 2017. — № 3. — С. 184—187. — EDN YKHFZE.
4. *Альбрехт Э. Г.* Синтез оптимального управления в линейных дискретных системах / Э. Г. Альбрехт, Л. А. Сазанова // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2000. — Т. 6. № 1-2. — С. 477—296.
5. *Калман Р. Е.* Об общей теории управления / Р. Е. Калман // Тр. I Междунар. Конгр. по автомат, упр. — Москва : Изд-во АН СССР, 1961. — Т. 2. — С. 56—62.
6. *Надеждин П. В.* О свойствах оптимальных и линейных импульсных систем / П. В. Надеждин // Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1964. — Вып. 4. — С. 104—112.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — Москва : Гостехтеоретиздат, 1953.
8. *Лоусон Ч.* Численное решение задач метода наименьших квадратов / Ч. Лоусон, Р. Хенсон. — Москва : Наука, 1986. — 232 с.
9. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра / В. В. Воеводин. — Москва : Наука, 1980. — 400 с.
10. Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов / А. И. Пропой. — Москва : Наука, 1973. — 256 с.
11. *Просветов Г. И.* Управление запасами: задачи и решения : учеб.-практ. пособие / Г. И. Просветов. — Москва : Альфа-Пресс, 2009. — 192 с.
12. *La Salle J. P.* The stability and control of discrete processes / La Salle J. P. — N. Y. : Springer-Verlag, 1986. — 150 p. — (Applied Mathematical Sciences; Vol. 62).
13. Wolfram Mathematica. — URL: https://www.wolfram.com/mathematica/?source=nav.

LIST OF LITERATURE

1. *Surkova P. I.* Discrete model of the task of managing stocks / P. I. Surkova // Mathematics, information technology, applications : the collection of works of the inter -university scientific conference of young scientists and students, Voronezh, April 27, 2022. — Voronezh : Scientific Book, 2022. — 292 p.
2. *Krasovsky N. N.* Theory of movement control: linear systems / N. N. Krasovsky. — Moscow : Science ; The main version of the physical and mathematical literature, 1968. — 475 p. — Edn Yodvxj.
3. *Sazanova L. A.* Discrete model management model as a task of optimal management / L. A. Sazanov // Bulletin of Voronezh State University. Series: Economics and Management. — 2017. — No. 3. — S. 184—187. — Edn YKHFZE.
4. *Albrecht E. G.* Synthesis of optimal management in linear discrete systems / E. G. Albrecht, L. A. Sazanov // Transactions of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. — 2000. — T. 6. No. 1-2. — P. 477—296.
5. *Kalman P. E.* About the general theory of management / P. E. Kalman // tr. I international. Congr. according to the machine, exercise. — Moscow : Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1961. — T. 2. — S. 56—62.
6. *Nadezhdin P. V.* About the properties of optimal and linear impulse systems / P. V. Nadezhdin // Izv. USSR Academy of Sciences, tech. Cybernetics, 1964. — Issue. 4. — S. 104—112.
7. *Gantmacher F. R.* Theory of Matrics / F. R. Gantmacher. — Moscow : Gostechtheoretizdat, 1953.
8. *Lawson Ch.* The numerical solution of the problems of the method of the smallest squares / Ch. Lawson, P. Henson. — Moscow : Nauka, 1986. — 232 p.
9. *Voevodin V. V.* Linear algebra / V. V. Voevodin. — Moscow : Nauka, 1980. — 400 s.
10. Propa A. I. Elements of theory of optimal discrete processes / A. I. Propa. — Moscow : Science, 1973. — 256 p.
11. *Prosvetov G. I.* Office of stocks: tasks and solutions : textbook.-practical. manual / G. I. Prosvetov. — Moscow : Alfa-Press, 2009. — 192 p.
12. *La Salle J. P.* The Stability and Control of Discrete Processes / *La* Salle J. P. — N. Y. : Springer-Werlag, 1986. — 150 p. — (Applied Mathematical Sciences; Vol. 62).
13. Wolfram Mathematica. — URL: https://www.wolfram.com/mathematica/?source=NAV.